CONCOURS GENERAL 1990

Exercice I

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres entiers définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{2n} = u_n \qquad u_{2n+1} = 1 - u_n$$

1. Calculer u_{1990}.
2. Déterminer le nombre d'indices n, inférieurs ou égaux à 1990, tels que $u_n = 0$.
3. Soit p un entier naturel et $N = (2^p - 1)^2$. Calculer u_N.

Exercice II

Un jeu est constitué de pièces en forme de tétraèdres réguliers d'arêtes de longueur 1. Toutes ces pièces ont été peintes à l'aide d'une palette de n couleurs.: chaque face d'un tétraèdre est peinte d'une seule couleur et on précise que les quatre faces d'un tétraèdre ne sont pas nécessairement de couleurs distinctes.

Déterminer le nombre maximal de pièces de ce jeu sachant que le jeu ne contient pas deux pièces identiques.

Exercice III

1. Trouver trois nombres entiers naturels a, b et c distints ou non, tels que :
$$\frac{1}{4} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$
2. Déterminer tous les nombres entiers naturels n tels qu'il existe n nombres entiers naturels x_1, x_2, $\ldots, x_n$, distincts ou non, vérifiant :
$$1 = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \cdots + \frac{1}{x_n^2}$$

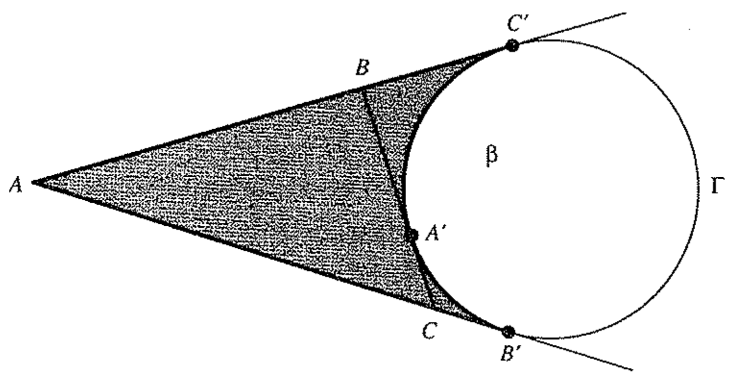
Exercice IV

1. Quelle est l'aire maximale d'un triangle dont les sommets sont dans un carré donné ?
2. Quel est le volume maximal d'un tétraèdre dont les sommets sont dans un cube donné ?

Exercice V

Pour tout triangle ABC, on note :

- Γ son cercle exinscrit dans l'angle du triangle de sommet A;
- A', B', C' les points de contact de Γ avec les droites (BC), (CA) et (AB);
- $S\,(ABC)$ l'aire de la portion du plan délimitée par les segments $[AB']$, $[AC']$ et l'arc $C'A'B'$ de Γ.



Montrer qu'il existe des triangles ABC, de périmètre $2p$ donné, pour lesquels l'aire $S\,(ABC)$ est maximale. Pour un tel triangle, donner une valeur approchée, à un degré près, de la mesure de l'angle du triangle ABC de sommet A.