MA 09

CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

—

SESSION DE 2009

—

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Classe terminale S)

DURÉE : 5 heures

—

La calculatrice de poche est autorisée, conformément à la réglementation. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

L'énoncé comporte trois exercices indépendants.

Il n'est pas obligatoire de traiter les exercices dans l'ordre de l'énoncé, à condition d'indiquer clairement l'exercice et la question traitée en respectant l'indexation du texte.

Pour poursuivre la résolution d'un exercice, les candidats peuvent admettre les résultats d'une question, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Exercice I
Analyse

Le but de l'exercice est la recherche des fonctions f définies sur $\mathbf{R}$, à valeurs dans l'intervalle $[-1,1]$, vérifiant pour tout réel x la relation $f(2x) = 2f(x)^2 - 1$, telles que $f(0) = 1$ et que $\dfrac{1-f(x)}{x^2}$ admette une limite lorsque x tend vers 0, que l'on notera a.

On rappelle que tout x de $[-1,1]$ s'écrit de façon unique $x = \cos(\theta)$ avec θ dans $[0,\pi]$.

1. (a) Vérifier $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{1-\cos(\theta)}{\theta^2} = \dfrac{1}{2}$. (On pourra utiliser une formule donnant $\cos(2\alpha)$).

   (b) Montrer, pour θ dans $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, les relations : $\dfrac{2\theta}{\pi} \leqslant \sin(\theta)$ et $\cos(\theta) \leqslant 1 - \dfrac{\theta^2}{\pi}$.

2. Soit f une fonction solution du problème On se donne un réel x et l'on pose, pour tout entier naturel n, $f\left(\dfrac{x}{2^n}\right) = \cos(\theta_n)$, avec θ_n dans $[0,\pi]$.

   (a) Montrer que f est continue en 0 et que $\lim\limits_{n\to\infty} \theta_n = 0$.

   (b) Vérifier l'existence d'un entier N tel que pour $n \geqslant N$ on ait $\theta_{n+1} = \dfrac{\theta_n}{2}$.

   (c) Établir que a est positif et que $f(x) = \cos\left(x\sqrt{2a}\right)$.

Exercice II
Probabilités
Jouons aux dés

Je joue avec 4 dés à 20 faces. Chacun de ces dés, dont la forme est un icosaèdre, a ses faces numérotées de 1 à 20. Lorsqu'on le lance, chaque face apparaît sur le dessus avec la même probabilité de $\dfrac{1}{20}$.

Lorsque, parmi les 4 dés, une face apparaît au moins deux fois, je marque le nombre de points correspondant à cette face. Ainsi :

- avec la combinaison 3 - 4 - 12 - 16, je ne marque rien ;
- avec la combinaison 2 - 8 - 11 - 11, je marque 11 points ;
- avec la combinaison 4 - 9 - 9 - 9, je marque 9 points ;
- avec la combinaison 7 - 7 - 14 - 14, je marque 21 points ;
- avec la combinaison 2 - 2 - 2 - 2, je marque 2 points.

1. Quelle est la probabilité que je ne marque rien ?
2. Soit a compris entre 1 et 20. Déterminer pour tout $k \leqslant 4$ la probabilité d'avoir exactement k nombres a parmi les dés lancés.
3. Pour tout a on note X_a la variable aléatoire qui vaut 1 s'il y a au moins deux dés égaux à a parmi les quatre du lancer, et à 0 sinon.

   Préciser la loi de X_a et exprimer le gain G à l'aide de ces variables.

   Combien de points puis-je espérer en moyenne ?

4. Quelle est la probabilité que je marque exactement 8 points ?

On suppose à partir de maintenant qu'après avoir lancé les 4 dés, je sois autorisé à relancer entre 0 et 4 dés pour améliorer mon score.

5. J'ai obtenu 11 - 7 - 2 - 2. J'hésite entre tout relancer, garder le 11, et garder les deux 2. Que dois-je faire ?
6. On suppose que j'ai obtenu 4 dés différents $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$. Quels dés dois-je relancer ?

Exercice III
Arithmétique

Étant donné deux entiers a et b, on désigne par $[\![a, b]\!]$ l'ensemble des nombres entiers compris au sens large entre a et b.

On considère une suite finie à n termes $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$.

On dit qu'un entier strictement positif p est une période de U si l'on a $u_i = u_{i+p}$ pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant n - p$. Une suite peut avoir plusieurs périodes.

1. On considère deux entiers strictement positifs a et b premiers entre eux.
   (a) On définit r_k comme le reste de la division de ka par $a + b$. Montrer que lorsque k varie dans $[\![1, a + b - 1]\!]$, r_k prend toutes les valeurs de $[\![1, a + b - 1]\!]$.
   (b) En déduire que si a et b sont périodes de U et si $n \geqslant a + b - 1$ alors U est constante.
2. On suppose à présent que a et b sont des entiers strictement positifs de PGCD d. Montrer que si U est périodique de périodes a et b et si $n \geqslant a + b - d$, alors U est de période d.
3. On considère deux entiers a et b strictement supérieurs à 1 et premiers entre eux.
   (a) Montrer que l'on peut partager l'intervalle $[\![1, a + b - 2]\!]$ en deux sous-ensembles non vides A et B de manière que la suite V égale à 1 sur A et à 0 sur B soit de périodes a et b.
   (b) Le partage obtenu à la question précédente est-il unique ? Montrer que, pour tout x de A, $a + b - 1 - x$ est dans A. Quelle propriété de la suite V traduit-on ainsi ?