CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

—

SESSION 2015

—

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Classes de terminale S)

Durée : 5 heures

—

L'usage de la calculatrice est autorisé

La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

Le sujet comporte trois problèmes indépendants.
Le candidat peut traiter les questions dans l'ordre de son choix, à condition de l'indiquer clairement dans la copie.

Consignes aux candidats

- **Utiliser un stylo foncé**
- **N'utiliser ni colle, ni agrafe**
- **Numéroter chaque page en bas à droite (numéro de page / nombre total de pages)**
- **Sur chaque copie, renseigner l'en-tête + l'identification du concours :**

Concours	Section/Option	Epreuve	Matière
C G L	C G L Y C	C O M P O	M A T H

Tournez la page S.V.P.

PROBLÈME II
Tétraèdres

On appelle *tétraèdre* la donnée, dans l'espace, de quatre points non coplanaires A, B, C, D. Les *arêtes* du tétraèdre sont les segments $[AB]$, $[AC]$, $[AD]$, $[BC]$, $[BD]$, $[CD]$.
Dans les questions 1° à 3°, $ABCD$ désigne un tétraèdre.

1° a) Montrer qu'il existe un unique point G tel que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{0}$.

b) Montrer que $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AG_A}$, où G_A est le centre de gravité du triangle BCD.

c) On appelle *médiane* issue de A la droite reliant A au centre de gravité du triangle BCD, et on définit de façon analogue les trois autres médianes, issues de B, de C et de D. Montrer que les médianes sont concourantes au point G.

2° Montrer qu'il existe une unique sphère qui passe par A, B, C, D. On l'appelle *sphère circonscrite* au tétraèdre $ABCD$ et on note O son centre.

3° On appelle *hauteur* issue de A la droite passant par A et orthogonale au plan BCD. On définit de façon analogue les trois autres hauteurs, issues de B, de C et de D. On dit qu'un tétraèdre de l'espace est *régulier* si toutes ses arêtes sont de même longueur.

a) Est-il vrai que les hauteurs sont concourantes en O si et seulement si le tétraèdre est régulier ?

b) Les hauteurs sont-elles nécessairement concourantes ?

c) Est-il vrai que les hauteurs sont concourantes en G si et seulement si le tétraèdre est régulier ?

4° Dans ce qui suit, le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ est noté $\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w}$.
Soit $\Delta_1,\dots,\Delta_4$ quatre droites distinctes non coplanaires concourantes en un point H. Pour $1\leqslant i\leqslant 4$, on choisit un vecteur directeur unitaire $\overrightarrow{u_i}$ de Δ_i et, pour $1\leqslant i,j\leqslant 4$, on note $c_{ij}=\overrightarrow{u_i}\cdot\overrightarrow{u_j}$.

a) On suppose qu'il existe un tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ dont les hauteurs sont concourantes en H et tel que $A_j\in\Delta_j$ pour tout $j\in\{1,2,3,4\}$. Montrer que $c_{12}c_{34}=c_{13}c_{24}=c_{14}c_{23}$.

b) Réciproquement, si $c_{12}c_{34}=c_{13}c_{24}=c_{14}c_{23}\neq 0$, montrer qu'il existe un tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ dont les hauteurs sont concourantes en H et tel que $A_j\in\Delta_j$ pour tout $j\in\{1,2,3,4\}$.

PROBLÈME III
Moyennes prévisionnelles

Dans ce problème, on considère des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}=(u_1,u_2,\dots)$ à valeurs réelles indexées par les entiers naturels non nuls. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de type $\mathscr{M}$ si, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, u_n est la moyenne des n termes suivants, c'est-à-dire

$$u_n=\frac{u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{2n-1}+u_{2n}}{n}.$$

1° Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de type $\mathscr{M}$ et C un nombre réel. Que dire de la suite $(u_n-C)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

2° Montrer que toute suite croissante de type $\mathscr{M}$ est constante.

3° Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de type $\mathscr{M}$. On suppose qu'il existe des réels a, b, c tels que $u_n=an^2+bn+c$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que $a=b=0$.

4° L'objectif de cette question 4° est de montrer que toute suite majorée ou minorée de type $\mathscr{M}$ est constante.
Dans les questions a) et b), on suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de type $\mathscr{M}$ à valeurs positives ou nulles, et on considère un entier $r\in\mathbb{N}^*$.

a) Soit p un entier tel que $p>r$. Montrer qu'il existe des entiers naturels non nuls q et q' tels que $q<p\leqslant q'\leqslant 2q$ et $u_{q'}\leqslant u_q\leqslant u_r$. En déduire que $u_p\leqslant 3u_r$.

b) Pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, montrer que $u_p\leqslant 3u_r$.

Dans les questions c) et d), on suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite minorée de type $\mathscr{M}$.

c) Soit D un réel strictement positif et soit $p\in\mathbb{N}^*$. Montrer que si u_p-D n'est pas un minorant de la suite (u_n), alors $u_p-\frac{3}{2}D$ n'est pas non plus un minorant.

d) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante.

e) Conclure.

5° Existe-t-il une suite non constante de type $\mathscr{M}$?