

**CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES****SESSION DE 2003**  
—**COMPOSITION DE PHYSIQUE-CHIMIE****(Classe de terminale S)****DURÉE : 5 heures**  
—***Calculatrice autorisée*****L'ÉCHOGRAPHIE**

*Ce problème est constitué de cinq parties. La partie I est consacrée à un bref préliminaire concernant les ondes sonores. La partie II étudie un modèle de propagation de ces ondes dans l'air et permet d'introduire les outils nécessaires à l'étude de l'échographie à usage médical (parties III, IV et V).*

*Si un résultat donné par l'énoncé est non démontré, il peut néanmoins être admis pour les questions suivantes. Ainsi, les diverses parties sont relativement indépendantes entre elles.*

*Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

*La plus grande importance sera donnée à la qualité de la rédaction et de la présentation des résultats obtenus. On prendra soin de préciser les unités pour chaque application numérique.*

## Partie I Préliminaire

- I.1 Qu'appelle-t-on onde mécanique? Définir sa célérité. Quelle relation y a-t-il entre sa fréquence  $\nu$  et sa longueur d'onde  $\lambda$ ?
- I.2 Il existe plusieurs types d'ondes. Définir ce qu'est une onde longitudinale et en donner un exemple. Faire de même pour une onde transversale (ou transverse).
- I.3 Expliquer ce qu'est une onde sonore en détaillant son principe physique de propagation.
- I.4 Existe-t-il une onde sonore transversale dans l'air? Expliquer.
- I.5 L'oreille humaine entend, en moyenne, des sons de fréquence comprise entre 20 Hz et 20 kHz. Situer dans ce domaine spectral les sons graves et les sons aigus. Quel est le rôle du tympan?

## Partie II Modèle de propagation du son dans l'air

Pour décrire la propagation d'une onde sonore longitudinale dans l'air, on considère un système modèle, représenté sur les figures 1a et 1b de la page 3, et caractérisé par les points suivants :

- Un tuyau rectiligne de section  $S$  est divisé en une infinité de compartiments par des pistons rigides de masse  $m$  et de section  $S$ . Le compartiment  $(C_n)$  correspond à l'espace compris entre les pistons  $\Pi_n$  et  $\Pi_{n+1}$ .
- Dans chaque compartiment se trouve une mole d'un gaz, assimilé à un gaz parfait.
- À l'équilibre, c'est-à-dire en l'absence d'onde sonore, l'abscisse du piston  $\Pi_n$  est  $x_n^{\text{eq}} = n a$ ; la pression et la température sont identiques dans chaque compartiment (équilibres mécanique et thermique) et on les note respectivement  $P_0$  et  $T_0$ .
- Hors d'équilibre, c'est-à-dire lors du passage de l'onde sonore, l'abscisse du piston  $\Pi_n$  vaut  $x_n = n a + u_n(t)$  à l'instant  $t$  et la pression dans le compartiment  $(C_n)$  vaut  $P_n$ .
- On suppose que l'évolution de la mole de gaz dans chaque compartiment se fait suivant la loi de LAPLACE : la pression  $P$  dans le compartiment est reliée en permanence à son volume  $V$  par la relation

$$P V^\gamma = \text{constante} \quad (1)$$

où le coefficient  $\gamma$  est une constante appelée coefficient polytropique de LAPLACE.

### II.A Surpression sonore

II.A.1 Établir l'expression de la pression  $P_n$  en fonction de  $P_0$ ,  $\gamma$ ,  $a$ ,  $u_n$  et  $u_{n+1}$ .

II.A.2 Dans cette question, on admet le résultat mathématique suivant avec  $\varepsilon$  et  $\mu$  réels :

$$(1 + \varepsilon)^\mu \simeq 1 + \mu \varepsilon \quad \text{lorsque } |\varepsilon| \text{ est très petit devant } 1 \quad (2)$$

Dans l'approximation dite de l'acoustique linéaire, on suppose que le déplacement des pistons est négligeable de sorte que  $|u_n(t)|$  reste très petit devant  $a$  pour tout  $n$ .

Montrer que l'expression précédente de  $P_n$  conduit à la formule linéarisée de la surpression  $P_n - P_0$  dans le compartiment  $(C_n)$  suivante :

$$P_n - P_0 = -\frac{1}{\chi} \frac{u_{n+1} - u_n}{a} \quad (3)$$

Donner l'expression de la constante  $\chi$  en fonction de  $P_0$  et  $\gamma$ . Son signe est-il en accord avec le « sens physique » donné à cette grandeur?

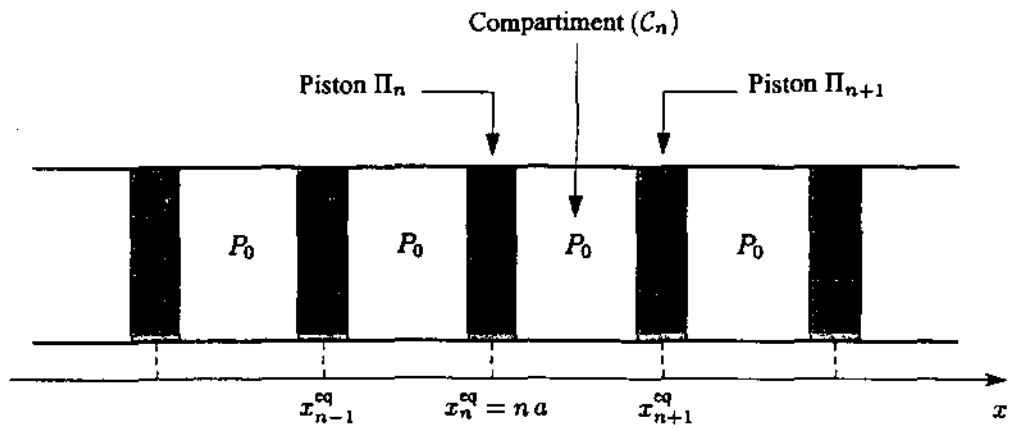


Figure 1a : position des pistons à l'équilibre

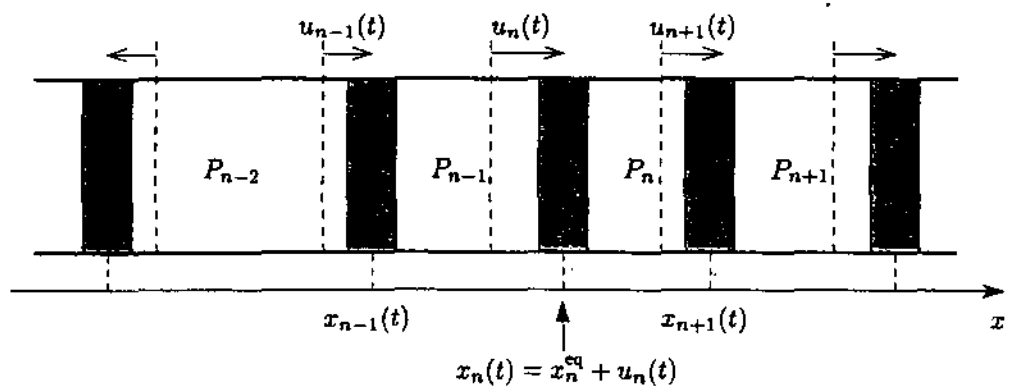


Figure 1b : position des pistons à l'instant  $t$  en présence d'une onde

II.A.3 La constante  $\chi$  est appelée coefficient de compressibilité. Donner sa dimension et justifier son nom.

Que vaudrait  $\chi$  si le gaz des compartiments était incompressible ?

Vérifier qu'aucune onde ne se propagerait dans ce cas.

## II.B Équation discrète de propagation

II.B.1 La force de pression qu'exerce un gaz à la pression  $P$  sur un piston de section  $S$  est donnée en module par la relation  $F = P S$ .

Faire une figure représentant les actions horizontales s'exerçant sur le piston  $\Pi_n$ . On néglige les frottements s'exerçant sur ce dernier.

II.B.2 En appliquant la deuxième loi de NEWTON au piston  $\Pi_n$ , obtenir l'équation différentielle du mouvement sous la forme :

$$\frac{d^2 u_n}{dt^2} = \frac{c^2}{a^2} (u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n) \quad (4)$$

Expliciter la constante  $c$  en fonction de  $\chi$ ,  $m$ ,  $a$  et  $S$ .

On admet que la quantité  $\rho_0 = \frac{m}{aS}$  représente la masse volumique du milieu modélisé à l'équilibre. Que devient l'expression de  $c$  ?

Préciser, en justifiant votre réponse, la dimension de  $c$ .

## II.C Approximation des milieux continus et équation de D'ALEMBERT

On se propose maintenant de se placer dans l'approximation des milieux continus qui permet de faire passer une fonction « normale-ment » régulière  $u(x, t)$  par tous les points représentatifs des déplacements  $u_n$  des pistons à un instant  $t$  donné, ce qui est possible lorsque  $u_n$  est peu différent de  $u_{n+1}$  (cf. figure 2).

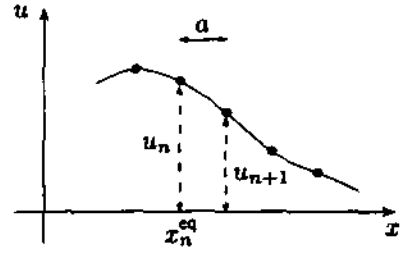


Figure 2 : représentation de  $u(x, t)$  à  $t$  fixé

Dans ce but, on définit la fonction  $u(x, t)$  des variables d'espace  $x$  et de temps  $t$  telle que :

- $u(x, t) = u_n(t)$  en  $x = n a$  pour tout  $n$  et tout  $t$  ;
- $u(x, t)$  varie peu dans l'espace à l'échelle de  $a$  ;
- $u(x, t)$  est dérivable au moins deux fois par rapport à  $x$ , ainsi que  $t$  et on note ses dérivées (dites partielles) comme indiqué dans le tableau suivant :

Notation	Signification mathématique
$\frac{\partial u}{\partial x}$	Dérivée première de $u(x, t)$ par rapport à $x$ en maintenant $t$ constant
$\frac{\partial u}{\partial t}$	Dérivée première de $u(x, t)$ par rapport à $t$ en maintenant $x$ constant
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	Dérivée seconde de $u(x, t)$ par rapport à $x$ en maintenant $t$ constant
$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$	Dérivée seconde de $u(x, t)$ par rapport à $t$ en maintenant $x$ constant

De plus, on admet qu'il est possible, pour la fonction  $u(x, t)$ , de réaliser l'opération suivante de permutation des dérivées partielles par rapport aux variables  $x$  et  $t$  :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)$$

On remarquera que la définition de la fonction  $u(x, t)$  permet d'écrire les relations :

$$u_{n+1}(t) = u(n a + a, t) = u(x + a, t) \quad \text{et} \quad u_{n-1}(t) = u(n a - a, t) = u(x - a, t)$$

**II.C.1** Expliquer en quoi l'approximation des milieux continus revient à prendre  $a$  très petit devant la longueur d'onde  $\lambda$  caractéristique de l'onde sonore dans le modèle précédent.

**II.C.2** On donne le résultat mathématique suivant : pour une fonction  $f$  de la variable  $y$ , il est possible d'écrire le développement, au voisinage de  $y$ ,

$$f(y + \varepsilon) \simeq f(y) + \varepsilon \frac{df}{dy}(y) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \frac{d^2 f}{dy^2}(y) \quad \text{si } |\varepsilon| \text{ est très petit devant } 1 \quad (5)$$

Montrer que l'équation différentielle discrète de propagation (4) se ramène à l'équation dite de D'ALEMBERT :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (6)$$

## II.D Solutions en ondes progressives de l'équation de D'ALEMBERT

On admet que les solutions de l'équation de D'ALEMBERT se mettent sous la forme

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) \quad (7)$$

Les fonctions  $f$  et  $g$ , dérivables au moins deux fois, sont quelconques.

II.D.1 Vérifier que la forme proposée de  $u(x, t)$  obéit à l'équation de D'ALEMBERT.

II.D.2 Rappeler la définition d'une onde progressive à une dimension.

II.D.3 Dans cette question, on prend la fonction  $g$  identiquement nulle.

La figure 3 donne une allure de la fonction  $u(x, t) = f(x - ct)$  à l'instant  $t = 0$ .

Représenter sur un même graphique l'allure de  $u(x, t)$  en fonction de  $x$ , pour  $t = 0$  puis pour  $t > 0$  fixé. Justifier.

En déduire que la fonction  $f(x - ct)$  représente une onde progressive à une dimension de célérité  $c$ .

On précisera son sens de propagation.

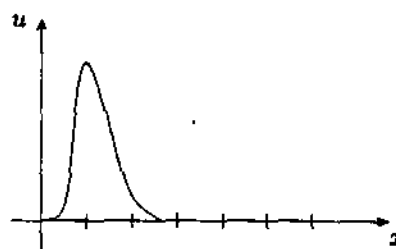


Figure 3

II.D.4 Que représente la fonction  $g(x + ct)$  ?

En déduire que la solution générale représente deux ondes qui peuvent « se croiser sans se perturber ».

## II.E Impédance acoustique

Soit  $v(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t}$  la vitesse du gaz en  $x$  à l'instant  $t$ . De plus, on note  $P(x, t)$  la pression en  $x$  à l'instant  $t$  dans le milieu;  $p(x, t) = P(x, t) - P_0$  représente la surpression par rapport à l'équilibre.

II.E.1 On définit l'impédance acoustique  $Z$  (ou résistance acoustique) du milieu parcouru par une onde progressive par  $p = Zv$ .

Justifier qualitativement cette définition en évoquant une analogie électrique.

II.E.2 En partant de la relation (3), montrer que

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{\chi} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (8)$$

II.E.3 Pour une onde progressive de la forme  $f(x - ct)$ , en déduire que  $Z = \rho_0 c$ .

Montrer que  $Z = -\rho_0 c$  pour une onde progressive de la forme  $g(x + ct)$ .

## II.F Applications numériques pour l'air

On admet que le modèle développé permet de décrire la propagation d'ondes sonores longitudinales dans l'air pour lequel la pression, la température et la masse volumique correspondent respectivement, à l'équilibre, à  $P_0$ ,  $T_0$  et  $\rho_0$ .

On donne pour l'air, assimilé à un gaz parfait, les valeurs  $\gamma = 1,40$ ,  $\rho_0 = 1,19 \text{ kg.m}^{-3}$  et  $P_0 = 1,01.10^5 \text{ Pa}$ . De plus, on rappelle que la masse molaire équivalente de l'air est  $M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$ . On prend, pour la constante des gaz parfaits,  $R = 8,32 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$ .

II.F.1 Quelle est la température  $T_0$  de l'air ?

**II.F.2** Évaluer la compressibilité  $\chi$  de l'air et la célérité  $c$  du son dans l'air, à la température  $T_0$ , d'après le modèle utilisé.

Calculer aussi l'impédance acoustique  $Z_{\text{air}} = \rho_0 c$ .

**II.F.3** Commenter, à l'aide des résultats du modèle, les valeurs expérimentales suivantes de la célérité du son dans l'air :

$T_0$ (°C)	$c$ (m.s <sup>-1</sup> )
0	331
25	346

### II.G Discussion de la validité de quelques hypothèses

**II.G.1** L'hypothèse de l'air assimilé à un gaz parfait est-elle plus plausible pour des pressions faibles ou élevées ? Justifier.

**II.G.2** Au lieu d'utiliser la loi de LAPLACE, on aurait pu prendre l'hypothèse antérieure de NEWTON : la propagation du son est isotherme, c'est-à-dire que la température reste égale à  $T_0$  lors du passage de l'onde.

Montrer que l'hypothèse de NEWTON revient, dans les résultats précédents établis à partir de la loi de LAPLACE, à faire tendre  $\gamma$  vers 1 et en déduire la valeur numérique de la célérité du son dans l'air à 25 °C dans l'hypothèse de NEWTON. Conclure.

## Partie III Échographie des organes du corps humain

Les ultrasons sont des ondes acoustiques sonores inaudibles pour l'homme, dont le domaine spectral s'étend de 20 kHz à 10 MHz. Ils sont notamment utilisés pour le test non destructif de matériaux.

En médecine, l'échographie est une technique d'imagerie autorisant des diagnostics pour les organes internes du corps humain grâce aux ultrasons. Ceux-ci sont générés sous forme d'impulsions successives par un transducteur en céramique à partir d'une excitation électrique. Les impulsions ultrasonores, réfléchies par les différents organes, donnent des échos perçus par le transducteur qui sert aussi de détecteur.

La figure 4 donne le principe de construction d'une image pour une échographie dite réalisée en mode B : une impulsion ultrasonore est émise dans la direction  $\theta$  à la date  $t_0$ . Les échos en résultant sont perçus aux dates ultérieures  $t_1, t_2, \dots$  Un traitement adéquat permet de réaliser l'affichage sur un écran de la position des échos, la luminosité d'un point étant liée à l'intensité de l'écho correspondant.

On construit, en modifiant l'angle  $\theta$  d'émission des ultrasons, une « image » des organes et, si la cadence de construction des images est suffisante, on peut visualiser leur mouvement.

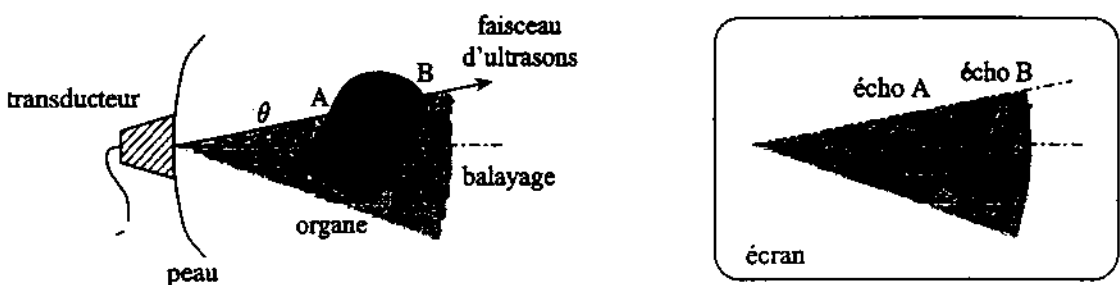


Figure 4 : principe de l'échographie

On se propose dans cette partie d'analyser la réflexion des ultrasons dans les milieux biologiques afin de préciser les conditions d'utilisation de l'échographie et d'interpréter l'existence de quelques artéfacts possibles sur les images obtenues.

### III.A Propriétés acoustiques des milieux biologiques

Pour des milieux liquide ou solide,  $\rho_0$  et  $\chi$  sont constantes. On admet que sous certaines conditions, supposées remplies dans toute la suite, l'équation de D'ALEMBERT (6) décrit toujours la propagation des ondes sonores longitudinales ; les résultats des questions II.D et II.E restent valables et la célérité des ondes progressives est  $c = 1/\sqrt{\rho_0 \chi}$ .

III.A.1 Un milieu biologique, autre que les os et les poumons, a des caractéristiques physiques proches de celles de l'eau :  $\rho_0 = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$  et  $\chi = 4,5 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$ .

Déterminer la célérité du son  $c_{mb}$  et l'impédance acoustique  $Z_{mb} = \rho_0 c_{mb}$  dans ce milieu.

III.A.2 On donne pour un os  $\rho_0 = 1900 \text{ kg.m}^{-3}$  et  $\chi = 3,3 \cdot 10^{-11} \text{ Pa}^{-1}$ .

Déterminer la célérité du son  $c_{os}$  et l'impédance acoustique  $Z_{os}$  dans ce milieu.

III.A.3 Quelles inégalités y a-t-il généralement entre les célérités du son dans un gaz, un liquide et un solide ?

III.A.4 Expliquer les inégalités précédentes en comparant la rigidité et l'inertie de ces milieux. L'analyse devra être chiffrée.

### III.B Coefficients de réflexion et de transmission des ultrasons

On s'intéresse à la réflexion des ultrasons à l'interface entre deux milieux, appelée *dioptre*, en utilisant le modèle *unidimensionnel* suivant (cf. figure 5) :

- dans le milieu ① (resp. ②), de masse volumique  $\rho_1$  (resp.  $\rho_2$ ), la célérité du son est  $c_1$  (resp.  $c_2$ ) ;
- une onde progressive incidente, décrite par la surpression associée  $p_i(x - c_1 t)$ , arrive sur le dioptre à l'abscisse  $x_0$  sous incidence normale ;
- elle donne naissance à une onde progressive réfléchie de surpression  $p_r(x + c_1 t)$  et à une onde progressive transmise de surpression  $p_t(x - c_2 t)$  ;
- l'étude est menée en régime permanent ;
- les milieux ne se mélangent pas.

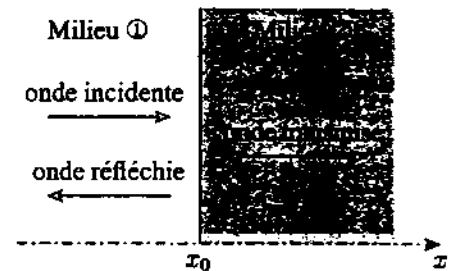


Figure 5

On affectera systématiquement les indices  $i$ ,  $r$  et  $t$  aux grandeurs physiques associées respectivement aux ondes incidente, réfléchie et transmise. De même, on affectera les indices 1 et 2 aux grandeurs physiques associées respectivement aux milieux ① et ②.

On admet que, dans chaque milieu, les grandeurs physiques associées aux ondes (déplacement  $u$ , surpression  $p$  et vitesse  $v$ ) se superposent. Par exemple, la surpression dans le milieu ① s'écrit

$$p_1(x, t) = p_i(x - c_1 t) + p_r(x + c_1 t)$$

**III.B.1** Expliquer pourquoi il y a continuité de la vitesse en  $x_0$  au passage du dioptré, c'est-à-dire

$$v_1(x_0, t) = v_2(x_0, t)$$

En déduire une relation entre les vitesses  $v_i$ ,  $v_r$  et  $v_t$ , associées aux diverses ondes, sur le dioptré.

**III.B.2** Montrer qu'il y a continuité de la surpression en  $x_0$  au passage du dioptré.

*Pour ce faire, on pourra considérer un piston fictif de masse  $m_p$ , de section  $S$  et d'épaisseur négligeable placé au niveau du dioptré entre les deux milieux ; on appliquera la deuxième loi de NEWTON puis on fera tendre la masse du piston vers zéro.*

Obtenir alors une seconde relation entre les vitesses  $v_i$ ,  $v_r$  et  $v_t$  sur le dioptré et faisant intervenir en plus  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $c_1$  et  $c_2$ .

**III.B.3** On associe à une onde acoustique progressive une énergie, dite acoustique, celle-ci étant d'autant plus élevée que l'onde est intense.

Les énergies acoustiques, au niveau du dioptré, des ondes progressives incidente, réfléchie et transmise sont notées respectivement  $\mathcal{E}_i$ ,  $\mathcal{E}_r$  et  $\mathcal{E}_t$ . On définit les coefficients de réflexion  $R_{12}$  et de transmission  $T_{12}$  de l'énergie acoustique de l'onde incidente sur le dioptré par les relations  $R_{12} = \mathcal{E}_r/\mathcal{E}_i$  et  $T_{12} = \mathcal{E}_t/\mathcal{E}_i$ . On admet que ces coefficients vérifient

$$R_{12} = \left( \frac{v_r(x_0 + c_1 t)}{v_i(x_0 - c_1 t)} \right)^2 \quad \text{et} \quad R_{12} + T_{12} = 1$$

Montrer que 
$$R_{12} = \left( \frac{\rho_1 c_1 - \rho_2 c_2}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2} \right)^2 \quad (9)$$

### III.C Application pratique à l'échographie

On donne dans le tableau suivant les valeurs numériques des impédances acoustiques de quelques milieux biologiques :

Milieu	Air	Graisse	Tissu mou	Foie	Muscle	Squelette
$Z$ ( $\text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ )	400	$1,36 \cdot 10^6$	$1,62 \cdot 10^6$	$1,66 \cdot 10^6$	$1,71 \cdot 10^6$	$7,80 \cdot 10^6$

Les réponses aux questions suivantes devront faire appel au calcul numérique de coefficients de réflexion et de transmission en énergie acoustique pertinents.

**III.C.1** En considérant l'interface tissu mou-air, montrer qu'il est nécessaire d'éviter la présence d'un film d'air entre le transducteur et la peau lors d'une échographie.

**III.C.2** On utilise en pratique un gel, introduit entre le transducteur et la peau. Donner une évaluation de son impédance acoustique.

**III.C.3** Expliquer pourquoi les organes remplis d'air (tube digestif, poumons) forment un écran acoustique aux ultrasons.

**III.C.4** On s'intéresse à l'interface tissu mou-squelette. Les os sont-ils *a priori* visibles sur une échographie ?

**III.C.5** L'imagerie du cerveau n'est pas aisée en raison d'un phénomène d'ombre acoustique. Expliquer pourquoi.



III.C.6 On souhaite analyser un rein par échographie (interface tissu mou-graisse). Les échos sont-ils intenses ? En quoi cette situation est-elle intéressante ?

III.C.7 En plus des effets d'écran et d'ombre acoustiques vus précédemment, il existe d'autres artéfacts qui rendent plus difficile l'analyse d'une image obtenue par échographie.

L'effet d'échos de répétition (ou échos multiples) est l'un d'eux. Expliquer son origine, schéma à l'appui.

Un autre artéfact provoque la formation d'images en miroir. Comment est-ce possible ?

## Partie IV Vélocimètre sanguin à effet DOPPLER

On étudie maintenant la possibilité de mesurer la vitesse d'un écoulement sanguin par la technique d'échographie par effet DOPPLER (cf. figure 6). Cette technique est utilisée en médecine pour la détection des sténoses vasculaires (rétrécissement des vaisseaux sanguins) qui, localement, entraînent une augmentation de la vitesse de l'écoulement du sang.

Le transducteur émet un faisceau d'ultrasons de fréquence  $\nu_0 = 3 \text{ MHz}$  et les échos perçus associés aux ondes réfléchies sur les globules rouges ont une fréquence légèrement différente (effet DOPPLER) dont la mesure donne accès à leur vitesse  $v$ .

La célérité des ondes dans tout le milieu biologique est  $c = 1500 \text{ m.s}^{-1}$ .

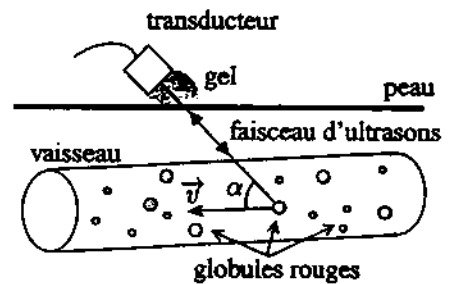


Figure 6

IV.A Décrire succinctement une situation de la vie courante où l'on perçoit l'effet DOPPLER.

IV.B Effet DOPPLER dans le cas  $\alpha = 0$

On s'intéresse, dans un premier temps, au cas où une onde ultrasonore de fréquence  $\nu_0$  est émise par le transducteur immobile en direction d'un globule rouge se rapprochant de lui à la vitesse de module  $v$  constant ( $\alpha = 0$ ).

IV.B.1 Quel est, dans le référentiel lié au globule mobile, l'intervalle de temps  $\Delta t_1$  séparant la réception par le globule de deux maxima successifs de l'onde en fonction de  $\nu_0$ ,  $v$  et  $c$  ?

En déduire la fréquence apparente  $\nu_1$  de l'onde perçue par le globule.

IV.B.2 L'onde est réfléchiée par le globule avec la fréquence  $\nu_1$  dans son propre référentiel. Quel est l'intervalle de temps  $\Delta t_2$  séparant la réception par le transducteur de deux maxima successifs de l'onde ?

En déduire la fréquence  $\nu_2$  de l'onde réfléchiée détectée par le transducteur en fonction de  $\nu_0$ ,  $v$  et  $c$ .

IV.B.3 On suppose que le globule a une vitesse  $v$  très petite devant la célérité  $c$  des ultrasons. Simplifier l'expression précédente de  $\nu_2$  à l'aide de la relation (2).

#### IV.C Effet DOPPLER dans le cas général

À présent, on tient compte de l'angle  $\alpha$  non nul (cf. figure 6). Pendant une période  $T_0$  de l'onde ultrasonore, on suppose que :

- la distance parcourue par le globule est très inférieure à sa distance avec le transducteur ;
- la vitesse  $\vec{v}$  du globule est toujours constante, de module  $v$  très petit devant la célérité  $c$  des ultrasons.
- l'angle  $\alpha$  entre le faisceau d'ultrasons et la vitesse  $\vec{v}$  est constant ;

Montrer que la fréquence  $\nu_r$  de l'onde réfléchiée détectée par le transducteur est donnée par

$$\nu_r \simeq \nu_0 \left[ 1 + 2 \frac{v}{c} \cos \alpha \right] \quad (10)$$

#### IV.D Application médicale

IV.D.1 L'observation par échographie de l'aorte, sous un angle  $\alpha = 10^\circ$ , conduit à la mesure d'une variation de fréquence  $\nu_r - \nu_0 = 1200$  Hz.

En déduire la vitesse des globules rouges dans l'aorte.

Quelle hypothèse antérieure valide-t-on ici ?

IV.D.2 Pensez-vous qu'un médecin arrive à obtenir une mesure aussi précise de la vitesse des globules ? Qu'est-ce qui limite sa précision ?

IV.D.3 En pratique, on n'observe pas seulement des échos de fréquence modifiée ; il y a aussi des échos voisins sans variation de fréquence. Comment peut-on les interpréter ?

### Partie V Optimisation du transducteur

De même qu'il est impossible d'isoler un rayon lumineux en raison de la diffraction, le transducteur ne peut pas générer un faisceau parfait d'ultrasons. Notamment, ce faisceau présente nécessairement une certaine ouverture angulaire qui limite la résolution des images échographiques obtenues. On dit que *le faisceau manque de directivité*.

On se propose d'étudier des techniques permettant d'améliorer la résolution des images échographiques (directivité optimale, focalisation des ultrasons), ainsi que de réaliser un balayage automatique des organes à imager.

Dans cette partie, le transducteur émet des ultrasons de longueur d'onde  $\lambda = 0,497$  mm (soit  $\nu = 3$  MHz) dans le milieu biologique.

#### V.A Impossibilité d'isoler un rayon lumineux

Expliquer pourquoi on ne peut pas isoler expérimentalement un rayon *lumineux* (infiniment fin).

Pour répondre, on considèrera *uniquement dans cette question une onde lumineuse monochromatique*, de longueur d'onde  $\lambda_0$ , arrivant sous incidence normale sur une fente rectangulaire centrée en  $O$  et de côtés  $a$  et  $b$  petits, c'est-à-dire de l'ordre de  $\lambda_0$  (cf. figure 7) ; on représentera sur un dessin l'allure de la figure de diffraction obtenue sur un écran. On précisera l'orientation de l'ouverture du faisceau lumineux par rapport à celle de la fente.

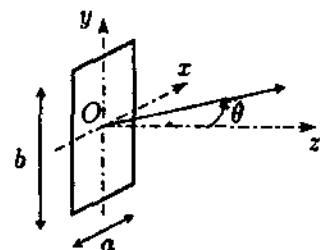


Figure 7

## V.B Résolution latérale d'un transducteur à un élément

Le transducteur est une source de surface rectangulaire, analogue à la fente précédente, de côtés  $a = 1,5 \text{ mm}$  et  $b = 1 \text{ cm}$  (cf. figure 7). On admet que l'onde ultrasonore qu'il émet est identique à celle obtenue par diffraction d'une onde ultrasonore de même fréquence à travers une fente rectangulaire de côtés  $a$  et  $b$ .

**V.B.1** Calculer numériquement l'ouverture angulaire du faisceau ultrasonore parallèlement au petit côté  $a$  (c'est-à-dire dans le plan  $xOz$ ).

Faire de même pour le grand côté  $b$ . Conclure.

**V.B.2** Un calcul théorique donne l'expression suivante de l'intensité acoustique  $I_{\text{dir}}(\theta)$  générée par le transducteur rectangulaire suivant la direction  $\theta$  dans le plan  $xOz$  (cf. figure 7), avec  $I_{\text{dir},0}$  une constante positive :

$$I_{\text{dir}}(\theta) = I_{\text{dir},0} \left[ \frac{\sin \left( \pi \frac{a}{\lambda} \sin \theta \right)}{\pi \frac{a}{\lambda} \sin \theta} \right]^2 \quad (11)$$

L'allure du *diagramme de rayonnement* du transducteur, représentant l'intensité acoustique émise en fonction de la direction  $\theta$  est donnée sur la figure 8. On remarque l'existence de plusieurs lobes : le plus important, suivant la direction  $\theta = 0$ , est appelé lobe principal et les autres sont appelés lobes secondaires.

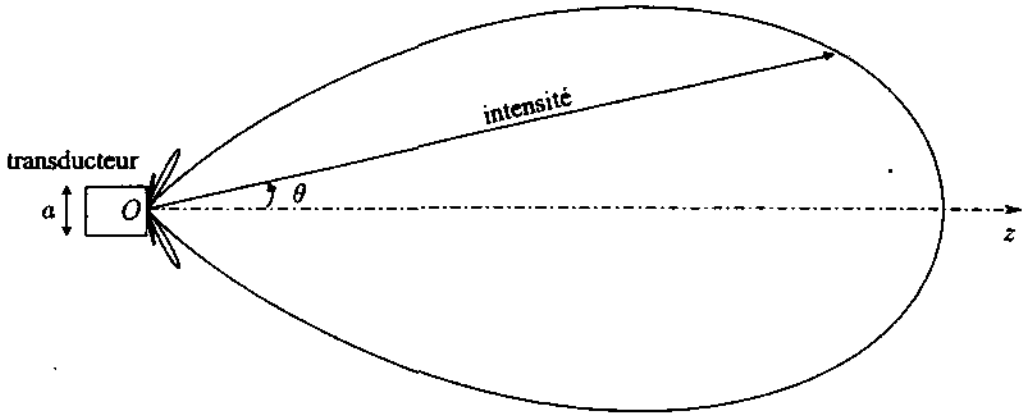


Figure 8 : *diagramme de rayonnement d'un transducteur à un élément*

On constate que les ultrasons émis présentent une directivité matérialisée par la largeur angulaire du lobe principal. Comment choisiriez-vous  $\lambda$  et  $a$  pour améliorer la directivité du transducteur ?

**V.B.3** Le choix précédent peut-être à l'origine de fausses images ou d'artéfacts très gênants en échographie médicale. Pourquoi ?

**V.B.4** Montrer que le choix de  $\lambda = 0,497 \text{ mm}$  et  $a = 0,4 \text{ mm}$  permet d'éviter ces problèmes. En contre-partie, quel est l'inconvénient de ce choix ?

## V.C Résolution latérale d'un transducteur multiéléments

Pour améliorer la directivité du faisceau d'ultrasons, on utilise maintenant un transducteur multiéléments. Il est constitué de  $N = 11$  éléments rectangulaires équidistants, séparés par une distance  $d = 0,7 \text{ mm}$ , et de propriétés identiques à l'élément étudié en V.B (cf. figure 9). On a toujours  $a = 0,4 \text{ mm}$  et  $b = 1 \text{ cm}$ .

Chaque élément est alimenté par un signal électrique identique : les ondes émises par les différents éléments sont par conséquent en phase les unes avec les autres.

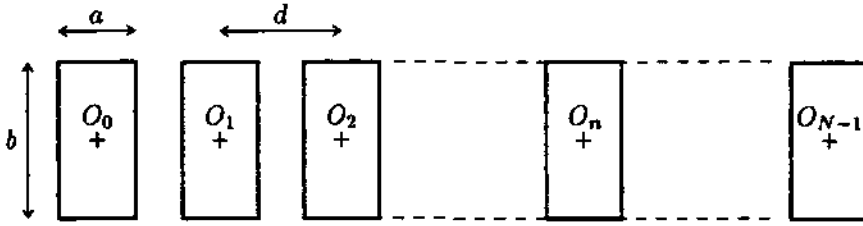


Figure 9 : transducteur multiéléments vu de face (plan  $xOy$ )

Dans un premier temps, on ne tient pas compte de la largeur  $a$  de chaque élément. On assimile donc le transducteur à une suite de  $N$  éléments rectilignes équi-espacés repérés par les points  $O_0, O_1, \dots, O_{N-1}$  (cf. figure 10).

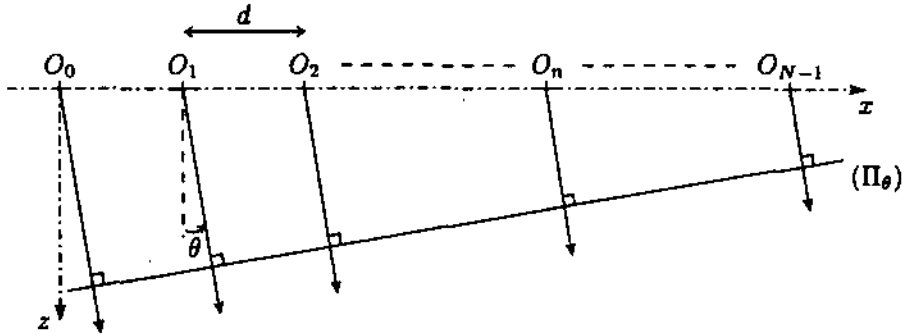


Figure 10

On s'intéresse aux ondes émises dans le plan  $xOz$  dans une direction faisant l'angle  $\theta$  avec l'axe  $Oz$ . On note  $(\Pi_\theta)$  un plan orthogonal à cette direction.

V.C.1 L'onde issue de  $O_0$  arrive en retard par rapport à celle issue de  $O_n$  au niveau du plan  $(\Pi_\theta)$ . Calculer le décalage temporel  $\tau_n(\theta)$ , au niveau de ce plan, de l'onde issue de  $O_0$  par rapport à celle issue de  $O_n$  en fonction de  $n, d, \theta$  et de la célérité  $c$  des ondes.

V.C.2 L'amplitude acoustique complexe  $\mathcal{A}_n(\theta)$  de l'onde émise par l'élément  $n$  dans la direction  $\theta$  est définie de sorte que

$$\mathcal{A}_n(\theta) = \mathcal{A}_0 \exp \left[ i \frac{2\pi c}{\lambda} \tau_n(\theta) \right] \quad (n \text{ variant de } 0 \text{ à } N-1) \quad (12)$$

On admet que l'intensité acoustique  $I_{\text{int}}(\theta)$  totale, résultant des interférences entre les diverses ondes, est donnée par la relation :

$$I_{\text{int}}(\theta) = |\mathcal{A}_0(\theta) + \mathcal{A}_1(\theta) + \dots + \mathcal{A}_{N-1}(\theta)|^2 \quad (13)$$

Montrer que l'intensité acoustique totale se met sous la forme

$$I_{\text{int}}(\theta) = I_{\text{int},0} \left[ \frac{\sin \left( N \pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta \right)}{N \sin \left( \pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta \right)} \right]^2 \quad (14)$$

V.C.3 Représenter l'allure de la courbe  $I_{\text{int}}(\theta)/I_{\text{int},0}$  en fonction de  $\sin \theta$ .

Vérifier que les directions  $\theta$  donnant une intensité acoustique maximale sont celles pour lesquelles les ondes émises par deux éléments consécutifs sont en retard d'un multiple entier de  $\lambda/c$  sur le plan  $(\Pi_\theta)$ .

On dit alors que l'interférence de ces ondes est constructive. Pourquoi ?

V.C.4 On tient maintenant compte de la largeur  $a$  de chaque élément du transducteur.

On admet que l'intensité acoustique totale  $I(\theta)$  s'obtient en faisant le produit de l'intensité  $I_{\text{dif}}(\theta)$ , obtenue avec un seul élément de forme rectangulaire, avec l'intensité  $I_{\text{int}}(\theta)$ , obtenue avec la série d'éléments pris rectilignes :

$$I(\theta) = I_{\text{dif}}(\theta) \times I_{\text{int}}(\theta) \quad (15)$$

Par conséquent, en posant  $I_0$  une constante, les résultats précédents conduisent à l'expression :

$$I(\theta) = I_0 \left[ \frac{\sin \left( \pi \frac{a}{\lambda} \sin \theta \right)}{\pi \frac{a}{\lambda} \sin \theta} \right]^2 \left[ \frac{\sin \left( N \pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta \right)}{N \sin \left( \pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta \right)} \right]^2 \quad (16)$$

L'allure de la fonction  $I/I_0$  en fonction de  $\sin \theta$  est représentée sur la figure 12.

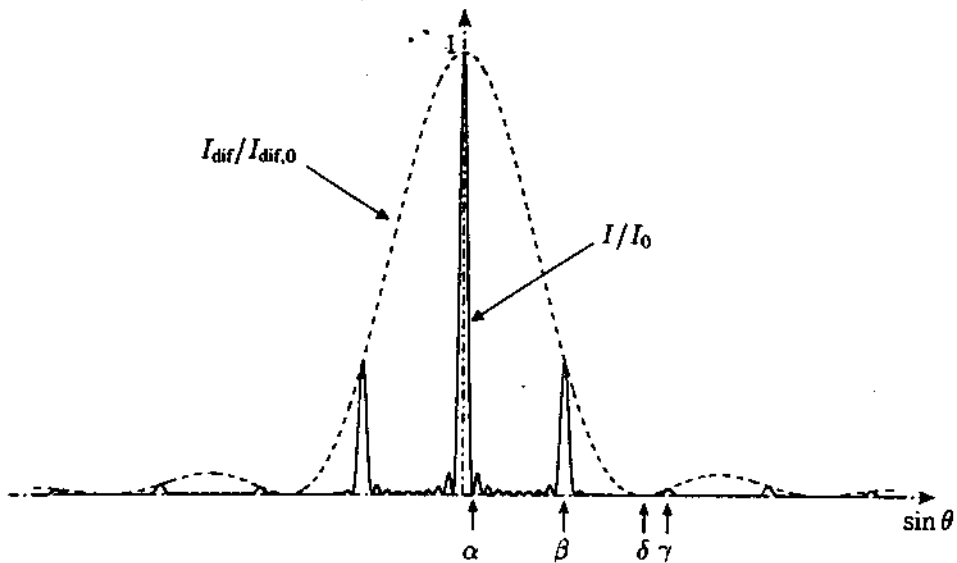


Figure 12 : Intensité produite par un transducteur multiéléments

V.C.4.a Sur la figure sont pointées les abscisses de quatre points particuliers :

- $\alpha$  est l'abscisse de la première annulation de  $I/I_0$  ;
- $\beta$  et  $\gamma$  sont les abscisses des deux premiers maxima secondaires de  $I/I_0$  ;
- $\delta$  est l'abscisse de la première annulation de  $I_{\text{dif}}/I_{\text{dif},0}$ .

Préciser les expressions de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\delta$  en fonction de  $\lambda$ ,  $N$ ,  $d$  et  $a$ .

V.C.4.b On rappelle que  $\lambda = 0,497$  mm,  $N = 11$ ,  $d = 0,7$  mm et  $a = 0,4$  mm. Vérifier numériquement que les ultrasons se décomposent en seulement trois faisceaux. Préciser l'angle  $\theta$  associé à chaque faisceau, ainsi que l'ouverture angulaire  $\Delta\theta$  de chacun.

V.C.4.c Comparer les intensités des trois faisceaux et tracer l'allure du diagramme de rayonnement du transducteur multiéléments.

V.C.4.d Quel intérêt voit-on ici à utiliser un transducteur multiéléments ? Quels paramètres doivent être modifiés pour éviter d'éventuels artefacts ?

## V.D Balayage sectoriel électronique

On laisse le transducteur multiéléments fixe, mais on introduit grâce à un système électronique un retard temporel  $\Delta t$  entre les signaux électriques alimentant deux éléments consécutifs, donc entre les ondes acoustiques émises.

V.D.1 Que devient l'expression (16) de l'intensité acoustique totale émise ?

V.D.2 Représenter, de manière analogue à la figure 12, la nouvelle courbe  $I/I_0$  en fonction de  $\sin \theta$ .

V.D.3 Quel est l'intérêt de cette technique dite de balayage sectoriel électronique ? Y voyez-vous un inconvénient ?

V.D.4 On souhaite explorer le domaine  $-30^\circ \leq \theta \leq 30^\circ$  par balayage sectoriel électronique. Qu'est-ce que cela impose sur la géométrie des éléments du transducteur ?

## V.E Focalisation du faisceau d'ultrasons

On conserve le transducteur multiéléments du type précédent mais le système électronique introduit maintenant un retard temporel  $\Delta t_n$  pour l'élément centré en  $O_n$  par rapport à celui centré en  $O_0$  (élément de référence). On veut choisir  $\Delta t_n$  de sorte à focaliser le faisceau d'ultrasons en un point précis.

Le transducteur multiéléments est centré sur un point  $O$  et est dirigé par l'axe  $Oz$ . On rappelle que  $N$  est impair ( $N = 11$ ).

V.E.1 À l'aide d'un schéma, expliquer ce que signifie le terme « focaliser » ?

V.E.2 Calculer la distance entre  $O_n$  et un point  $F$  de l'axe  $Oz$  tel que  $OF = f$ .

V.E.3 En déduire la valeur  $\Delta t_n$  que le système électronique doit affecter afin que les ondes émises par les divers éléments soient constructives au point  $F$ .

V.E.4 En pratique, la focalisation n'est pas parfaite et on obtient un faisceau d'une largeur de l'ordre de  $\frac{\lambda}{Nd}$  au voisinage du point  $F$ . Commenter l'intérêt de cette méthode pour l'échographie médicale.